論文

数学の試験答案における計算ミスのパターンについて（1）

－線形代数の場合－

稲葉　宏和*

要　旨

数学（線形代数）の試験答案に見いだされる計算ミスのパターンを分析した。これらの計算ミスは、いくつかのパターンに分類することが出来る。計算ミスのパターンとして、内容が理解できていないということ以外に、計算規則の間違い、暗算ミス、文字・数字・式の読み間違いや転記ミス、前提条件の抜けなどが見受けられる。これらのミスがどのように起こるかを理解することは、教員が講義をするうえで非常に有用であると考えられる。

キーワード：計算ミスのパターン／数学／線形代数／試験答案

1. はじめに

農学系の大学である石川県立大学では、入試科目としての数学はセンター試験のみで個別学力試験では課してはいない。

1年生の教養科目「数学」の受講学生を対象としたアンケートで、学習歴として高校2年次までの数学（数学Ⅰ、数学A、数学Ⅱ、数学B）はほぼ全員が、高校3年次の数学（数学Ⅲ）は7割弱の学生が授業を受けている。

しかし、受験科目として他大学での個別学力試験で数学を受験した学生は37%程度である。6割強の学生が受験科目として数学を勉強してはいない。そのため、数学が不得意であると思っている学生が多くいる。実際、数学の試験答案を採点する際、計算ミスが多く見受けられる。

近年、工学系の学部においても、「理数基礎学力が全体的に低下しつつある」との指摘がある（松本・鈴木，2010）。

著者は数学系の科目として、全学科対象の教養科目「数学」（1年後期・選択）、環境科学科の固有科目である「応用数学」（1年後期（2017年度より2年前期）・選択）を担当している。

以前、環境科学科1年後期・選択の固有科目である「応用数学」（常微分方程式の解法）での計算ミスのパターンについて報告した（稲葉，2017）。そこでは、計算ミスのパターンを4つに分類し、検討した。

また、教養科目「数学」の試験答案でも計算ミスが多く見受けられ、同様にいくつかのパターンがあると感じている。

そこで、教養科目「数学」の試験答案における計算ミスのパターンについて検討する。教養科目「数学」では、一変数の微分積分の計算、および、線形代数の入門を講義している。線形代数の入門では、ベクトル・行列の演算、行列式、逆行列を用いた連立方程式の解法などを扱っている。

本論文では、教養科目「数学」の中の線形代数の問題での計算ミスのパターンを分析する。計算ミスのパターンの分類を行い、それぞれの原因を検討する。

また、微分積分については別の論文で検討する予定である。

2. 計算ミスのパターン

現在、高等学校の数学で、線形代数についての内容として数学Bでベクトルを習っている。しかし、以前数学Cで扱われていた行列は、数学Cの廃止に伴い習われなくなった（文部科学省，2009）。

そのため、行列式や逆行列など新しい概念の理解が不十分な学生も多い。

教養科目「数学」の中の線形代数では、ベクトルの計算、行列の計算、行列式、逆行列、余因子を用いた3次の行列の逆行列の求め方、逆行列を用いた連立方程式の解法、ランク（階数）と連立

* 石川県立大学生物資源環境学部　教養教育センター

方程式の解の存在、同次連立方程式の非自明解などを取り扱った。試験では、それらの内容について出題した。

線形代数では、微分方程式の場合と異なり、微分積分の公式の利用のような複雑な計算を含んではいない。基本的には数の四則演算が中心である。

しかし、計算方法を用いるときの前提条件の検討が抜けているものが多くみられた。以前の報告では、これを記述ミスに含めていた（稲葉, 2017）。しかし、これは単なる記述の抜け（ミス）ではないと考え、新たなパターンとして分類に追加した。

この前提条件の検討が抜けている場合は、問題を吟味・考えることでなく計算手続きの不十分な記憶によって計算を進めていると考えられる。そのため、前提条件が満足されていない場合では、計算できない手順で計算を進め、間違った解答に至ることとなる。

学生の解法過程での計算ミスを分析するため、試験の答案を分析の対象とした。

本論文で対象にした試験は、2017年度の「数学」の後期試験（2018年2月8日実施）である。試験の答案用紙に計算ミスのパターンの収集・分析を行い、今後の講義に役立てるとの趣旨を述べ、試験受験者に協力を求めた。同意・非同意で成績などへの影響はない旨を明記し、非同意の場合にチェック欄にチェックの記入を求めた。今回対象とした１年生の試験受験者は102名で、その内3名が非同意で、分析対象学生数は99名であった。

試験問題のうち線形代数の問題は5問で、平均正答率（設問に対しての満点のみの割合）は51%であった。

この「数学」の後期試験の答案での、線形代数の問題での計算ミスのパターンを調べた。計算ミスは問題毎に初めに現れたミスを対象とした。

以前に報告した応用数学では、計算ミスのパターンを大きく４つに分類した。（１）問題を理解していない・解法の公式の間違い、（２）計算規則の間違い、（３）暗算ミス、（４）文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス、である（稲葉, 2017）。

さらに、以前では（４）の記述ミスに含めていた「（５）前提条件抜け」を付け加え、線形代数では５つのパターンに分類する。

（１）のミスは、問題の題意を理解できていない、もしくは、誤解していると考えられる。また、（５）は条件を検討せず計算を進めているので、内容の理解不足と考えられる。

それに対して、（２）～（４）のミスは計算プロセスのミスである。問題自体の難易度に関係なく、計算途中の式変形で現れるミスである。本論文でも、これらのミスについて検討する。

以下に、それぞれの計算ミスのパターンの具体例を示す。

（１）については題意が理解できていないので具体例は省略する。

（５）については、同次連立方程式の非自明解の導出の問題で、係数行列の行列式が0であるという非自明解の存在する条件を述べずに、いきなり行列式の計算をしている、などである。条件が抜けているだけであるので、具体例を省略する。

（２）～（４）の計算ミスのパターンについて具体例をいくつか示す。□で囲われた部分が原文の儘の具体例である。

（２）計算規則の間違い

例２－１　ベクトルの内積の間違い

$\vec{a}=(2,-3,-4)$, $\vec{b}=(1,2,-1)$のとき、$\vec{a}$と$\vec{b}$との内積の計算を

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=(2+1,-3+2,-4-4)=(3,-1,-5)}$$

または、

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\big(2\cdot 1,-3\cdot 2,-4\cdot(-1)\big)=(2,-6,4)}$$

と計算している。

正しくは

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1-3\cdot 2-4\cdot(-1)=2-6+4=0$

である。内積の結果がスカラーでなくベクトルになっていて、内積の計算を正しく理解していない。

例２－２　行列の積の計算間違い

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+1\cdot 1+(-3)\cdot 3\\ 3\cdot 3+(-2)\cdot 3+4\cdot(-1)\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

または、

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\\ &=-2+1-6+6+3+3\\ &\quad -3-2+8+9-6-4\end{aligned}}$$

または、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 1\cdot 1 & (-3)\cdot 3 \\ 3\cdot 3 & (-2)\cdot 3 & 4\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

と計算している。
正しくは

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+1\cdot 1+(-3)\cdot 2 & 2\cdot 3+1\cdot 3+(-3)\cdot(-1) \\ 3\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+4\cdot 2 & 3\cdot 3+(-2)\cdot 3+4\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

である。行列の積の計算規則を正しく理解していない。

（3）暗算ミス
例３－１

$$\begin{pmatrix} -2+1-6 & 6+3+3 \\ -3-2+8 & 9-6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

と計算している。2行1列目を計算ミスしている。
正しくは、

$$\begin{pmatrix} -2+1-6 & 6+3+3 \\ -3-2+8 & 9-6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

例３－２

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

と計算している。1行1列目と2行2列目を計算ミスしている。
正しくは、

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 7 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

である。

例３－３

$$3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と計算している。右辺の１つ目の行列の２行２列目と３行１列目を計算ミスしている。
正しくは、

$$3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

である。

（4）文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス
例４－１　転記ミス
余因子$A_{33} = -1$　より

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

としている。3行3列目の値$A_{33} = -1$を１と転記ミスしている。
正しくは

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

例４－２　転記ミス
行列式 $|A| = -2$であるのに

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

としている。行列の前にかかっている係数 $\frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$ を、$\frac{1}{2}$ と転記ミスしている。

正しくは

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

例４－３　転記ミス
問題では

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

であるのに対し、答案には

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \cdots}$$

と書かれている。答案に写す際に最初の行列の１行３列目の－３を３と転記ミス（マイナス符号が抜ける）している。

例４－４　符号の間違い

$$\boxed{\begin{aligned} &3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

と計算している。右辺の２つ目の行列の符号がプラスになっている。
正しくは

$$\begin{aligned} &3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

例４－５　行列の表記ミス

$$\boxed{\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}}$$

と書いている。行列の括弧を行列式の括弧と間違えている。

正しくは

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

である。

例４－６　行列式の表記ミス

$$\boxed{|\mathrm{A}| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}}$$

と書いている。例４－５とは逆に、行列式の括弧に行列の括弧を書いている。
正しくは

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

である。

例４－７　行列の表記ミスとそれに伴う計算ミス

$$\boxed{\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\big(2\cdot 2\cdot(-1) + 0\cdot 0\cdot(-4) + (-4)\cdot 2\cdot 1 \\ &\quad - 1\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 2\cdot 0 - (-4)\cdot(-4)\cdot(-1)\big) \end{aligned}}$$

としている。行列の括弧を行列式の括弧と書き間違えている。それに気がつかず、さらに行列式として誤って計算を進めている。
正しくは

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

3. 計算ミスのパターンについての検討

それぞれの計算ミスのパターンについて、以下のように考えられる。

（１）問題を理解していない・解法の公式の間違い

何の問題かを把握していない。もしくは、解法自体を理解していないために解法の公式や手順を間違える、使えない解法を使うなどの間違いである。

しかし、学生は問題を理解していないと考えず、単に計算ミスをしていると考えている場合が多

い。

（２）計算規則の間違い

ベクトルの内積や行列の和・積の計算方法の間違い、基本変形の仕方の間違い、基本変形はするが三角行列ができていない、などがある。

行列の計算に習熟していないために起こる間違いである。

（３）暗算ミス

勘違いの計算ミスが主となっている。公式の記憶違いや勘違いなどが考えられる。途中経過が示されていないため、どのように間違えたのかが不明である。（２）や（４）の計算ミスである可能性もある。

（４）文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス

不注意が原因と考えられる。意外に多いのが転記ミスである。後で見て、なぜと思うようなものである。そのため、計算を間違えていることに気がついていないことが多い。この点を学生に指摘すると、なぜそのように書いたのか自身でも不思議に思うようである。

（５）前提条件の抜け

計算の条件を検討せず、記憶により公式などを無理に当てはめようとしていると考えられる。

これらの計算ミスのパターンの割合を表１に示す。

表１．計算ミスのパターンとその割合

計算ミスのパターン	割合
(1)問題を理解していない・解法の公式の間違い	26.3% (33%)
(2)計算規則の間違い	21.5% (36.8%)
(3)暗算ミス	17.8% (19%)
(4)文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス	20.6% (11.2%*)
(5)前提条件の検討の抜け	13.8%

() 内は 2016 年の応用数学でのミスのパターンの割合である（稲葉，2017）。

*(5)のパターンは応用数学では(4)に含めていた。

「（１）問題を理解していない・解法の公式の間違い」が 26.3％で全体の 1/4 強である。基本変形、ランク、行列式、逆行列などの新たな概念が多いので、理解が不十分な間違いが多い。また、解答として何を求められているかの理解が不十分なための間違いも多い。行列は高校で扱われていないため、微分積分の計算と違い計算に慣れていない学生が多いことも一つの理由であると考えられる。

一般に計算ミスとされる「（２）計算規則の間違い」が全体の 21.5% で全体の 1/5 強である。計算規則の理解が不十分なため、公式を誤って記憶していると推測されるものが多い。行列の和や積などの基本的な計算規則の理解が出来ていないための間違いが多い。計算に習熟していないことが大きな原因と考えられる。

ケアレスミスと考えられる「（３）暗算ミス」が全体の 17.8％で全体の 1/5 弱である。また、「（４）文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス」が全体の 20.6% で全体の 1/5 強である。両方を合わせると 38.4% で全体の 4 割弱である。単純ミスが多いと思われる。

特に、「（３）暗算ミス」は、記憶違いや勘違いが原因であると思われる。途中経過を省略したために間違えたのではないかを思われるものも多い。丁寧に計算することで避けることができる可能性があると考えられる。

「（４）文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス」も割合としては多く、注意することで回避できる可能性があると考えられる。大学で初めて行列を習うため、書きなれていないので、「（４）の読み間違い、転記ミスや記述ミス」の割合が以前の「応用数学」の場合に比べて線形代数の方が多くなっている。

また、数字や文字を乱雑に書く、メモのように計算を書くため、読み違えているミスもあり、丁寧に書くことで回避できるのではないかと思われる。

「（５）条件抜け」も割合としては多い。答案を書く場合は、単に答えを求めるのではなく、計算過程を示す必要がある。どのような前提でどのように考えたのかを示すことの必要性を理解することが重要である。

これらのような間違いの原因として、一つには、『数学は最後の答えを当てる教科である。「途中」がだめでも「結果」さえ正しければいい』という考え方を学生が採るとの指摘がある（速水, 2016）。

また、計算方法に習熟する努力をおこたるので、

解き方を理解しない（できない）で「暗記に頼る」解答をする傾向が指摘されている（野崎，2014）。

（１）のミスは、内容が理解できていないので勉強不足といえる。しかし、（２）～（５）については、いくつかの改善方法が指摘されている。

例えば、ノートの取り方、計算練習の必要性など計算ミスの改善方法の提案や指摘がいくつかなされている（皆川，2016）、（鈴木・西・塚本，2012）、（鯉川，2010）。また、答案を計算メモとせず、文章として書くようにすることを薦めている（森，1981）。

このような方法により、（２）～（５）のミスの改善が期待できる。

4. まとめと今後の課題

教養科目「数学」の中の線形代数の試験問題の解答から、学生の計算ミスのパターンを分類した。本論文では、大きく５つに分類した。

計算ミスというより科目内容の理解が不十分であることに原因があると考えられるもの、計算に習熟していないことに原因があると考えられるもの、記憶違いや勘違いをしていることに原因があると考えられるもの、不注意に原因があると考えられるものがあった。

このような間違いを回避する方法の検討が重要となる。原因によりパターンが異なるので、それぞれに回避する方法も異なると考えられる。ミスの原因を明確にすることが重要になると考えられる。

以上のことを踏まえ、学生の計算ミスのパターンにどのようなものがあり、どのようなミスをしやすいかということを教員が理解することは講義をするうえで非常に有用であると考えられる。

引用文献

稲葉宏和．2017．　応用数学の試験答案における計算ミスのパターンについて．平成28年度石川県立大学年報．42-48.

鯉川雅之. 2010.　基礎数学科目でのLMSの活用と効果. 大学教育年報．第6号．35-42.

鈴木紀明・西健次郎・塚本道郎．2012．工学系学生に対する数学基礎教育について―何をどのように教えるか―．名城大学教育年報．　第6号．76-81.

野崎昭弘. 2014. 人はなぜ､同じ間違いをくり返すのか. ブックマン社.

速水孝夫．2016．大学初年次の数学科目にみる数学教育の危機感について．北海学園大学学園論集．第170号．27-38.

松本幸正・鈴木温．2010．名城大学理工学部における数学基礎教育の改善と効果検証. 工学教育．第58-4号. 77-83.

皆川雅章．2016．大学初年次における基礎的計算力育成方法の検討―動画教材と学習用ノートの活用―. 2016PC Conference CIEC研究大会論文集．197-198.

文部科学省．2009. 高等学校学習指導要領解説　数学編（平成21年11月）.
http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/1282000.htm（平成24年6月6日更新）

森毅．1981．数学受験術指南．中央公論社．第6章数学答案の書き方.

On patterns of miscalculations found in mathematics examination sheets (1) : In the case of linear algebra

Inaba, Hirokazu（Liberal Arts Education Center, Ishikawa Prefectural University）

Abstract

Miscalculations found in mathematics examination sheets for problems of linear algebra are categorized into several patterns. These miscalculations include calculation rule mistakes, giving incorrect sign and number, incorrect calculations, missing preconditions, and others. Understanding how these mistakes happen will help students to avoid these mistakes.

Keywords: patterns of miscalculations ／ mathematics ／ linear algebra ／ examination papers