

応用数学の試験答案における計算ミスのパターンについて

On Patterns of Miscalculations Found in Applied Mathematics Examination Papers

石川県立大学生物資源環境学部 教養教育センター 稲葉 宏和

Abstract

We report miscalculations found in applied mathematics examination papers are categorized into several patterns. These miscalculations include use of wrong formula, Calculation rule mistakes, giving incorrect sign and number, incorrect calculations, and others. Understanding how these mistakes happen will help students avoid these mistakes.

Keywords: patterns of miscalculations; applied mathematics; examination

1. はじめに

石川県立大学は農学系の大学である。それまでの数学の学習歴から、数学を不得意に思っている学生が多い。

数学の試験をすると、学生から「難しい」という以外に「答えが合っていましたか」との質問を受けることが多い。実際、学生答案には誤答が多く、中には不思議に思う間違いもある。

試験の答案を採点しているとき、誤答にいくつかのパターンがあると感じていた。

そのパターンを分析することで、学生の計算ミスや内容の誤解の傾向を知ることができると思われる。

その点を踏まえて、講義を行うことは有用であると考えられる。

これまでの数学での計算ミスについての報告では、初等教育の算数での計算間違いについて認知心理学による解説がある（鈴木ほか, 1989）。

高等教育では、大学の文系数学での計算力養成の試みの報告の中で、計算ミスの改善方法が提案されている（皆川, 2016）。

また、具体的な計算ミスの分析として、高専の物理での計算間違いのパターンの分析の報告がある（佐藤, 2009）。

しかし、大学での数学の具体的な計算ミスのパターンの分析はあまりない。

本論文では、環境科学科の「応用数学」の後期試験の答案の中の計算プロセスにおける具体的な計算ミスのパターンについて調べた。その計算ミスのパターンを大きく4つに分類し、その原因について検討した。

講義の際に、教員が学生の計算ミスのパターンにどのようなものがあるかを理解しておくことは有用であると考えられる。また、学生に対して計算ミスしやすいものやそのパターンを提示することで注意を促し、自ら計算ミスを防ぐ工夫をさせることも重要であると考えられる。

今まで数学が不得意な学生に対処するため、著者は担当の教養科目「数学」（1年後期・全学科・選択）で補習のeLearningを行ってきた（稲葉・桶, 2015）。

eLearningの問題では、プロセスを問う穴埋め問題を用いている。解答の入力を容易にするため、数字の入力もしくは多肢選択を用いている。

多肢選択での誤答の選択肢を作成する際に、試験での計算ミスのパターンを活用できないかと考えてきた。その点からもこの計算ミスのパターンの分類の必要性を感じていた。

また、このような計算ミスのパターンを知ること、自然科学系の他の科目での計算問題の指導に有用であると思われる。

この点からも本論文の分析は様々な活用可能で有用であると考えられる。

2. 計算ミスのパターン

著者は数学系の科目として、全学科対象の教養科目「数学」(1年後期・選択)、環境科学科の固有科目である「応用数学」(1年後期(2017年度より2年前期)・選択)を担当している。

「応用数学」の内容は線形常微分方程式の解法である。主に求積法による解法を用いている。

教養科目「数学」の内容は、1変数の微分積分・線形代数の入門である。「応用数学」と同時期の開講であり、積分の計算方法に習熟する途中の時期でもある。

そこで、「応用数学」で非同次方程式の特殊解を求めるときには、あまり積分計算を駆使しないで済むよう演算子法(代数的な手法)を用いている。

常微分方程式の解法は、その微分方程式の型式により異なる。そのため、常微分方程式を解く際は、まずその形式を正しく判断する必要がある。形式が分かれば、それぞれの形式によって決まっている解法に従って解くことが出来る。

学生はこのような手順に従い問題と解くことになる。

そのような解法での学生のミスを分析するため、試験の答案を分析の対象とした。

本論文で対象にした試験は、2016年度の「応用数学」の後期試験(2017年2月3日実施)である。試験の答案用紙に計算ミスのパターンの収集を行い、分析を行い、今後の講義に役立てるとの趣旨を述べ、協力を求めた。同意・非同意で成績などへの影響はない旨を明記し、非同意の場合にチェック欄にチェックの記入を

求めた。試験の受験者は56名で、その内1名が非同意で、分析対象学生数は55名であった。内訳は、1年生が41名で、過年度生が14名であった。

また、試験問題は9問で、平均正答率(設問に対しての満点のみの割合)は39%であった。

この「応用数学」の後期試験の答案での、計算ミスのパターンを調べた。計算ミスは問題毎に初めに現れたミスを対象とした。

その計算ミスのパターンの分類を試みた。

計算ミスのパターンは大きく次の4つに分けることができると考えられる。

- (1) 問題を理解していない・解法の公式の間違い
- (2) 計算規則の間違い
- (3) 暗算ミス
- (4) 文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス

(1)のミスは、問題の題意を理解できていない、もしくは、誤解していると考えられる。

それに対して、(2)～(4)のミスは計算プロセスのミスである。問題自体の難易度に関係なく、計算途中の式変形で現れるミスである。本論文では、これらのミスについて検討した。

以下に、それぞれの計算ミスのパターンの具体例を示す。

(1)については題意が理解できていないので除外し、(2)～(4)の計算ミスのパターンについて示す。また、例9、16～19、22に現れるDは微分演算子 $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$ である。

- (2) 計算規則の間違い(例1～8)

例1

$$\int \frac{1+y}{y} dy = -\int \frac{1+x}{x} dx$$
$$\log \left| \frac{y}{1+y} \right| = -\log \left| \frac{x}{1+x} \right| + C$$

公式 $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$ と同様に

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C \quad \text{とすることができ}$$

ると間違えて考えている。正しくは、

$$\int \frac{1+x}{x} dy = \int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx \quad \text{と考える積分する必要がある。}$$

例 2

$$\int \frac{1}{2x} dx = \log|2x| + C$$

$t = 2x, dx = \frac{1}{2} dt$ の置換積分ができていない。

正しくは、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x} dx &= \int \frac{1}{t} \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log|t| + C \\ &= \frac{1}{2} \log|2x| + C \end{aligned}$$

である。

例 3

$$\begin{aligned} -\int \left(1 + \frac{1}{y} \right) dy &= \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx \\ -\left(y - \frac{1}{2} y^2 \right) &= x - \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

間違っ、 $\int x^{-1} dx = -\frac{1}{2} x^2 + C$ としている。

-1 乗を 1 乗としている。正しくは、

$$\int x^{-1} dx = \log|x| + C \quad \text{である。}$$

例 4

$$-\int \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{3y^3}$$

これは、 y の次数を微分の計算と間違えている。

正しくは、 $-\int \frac{1}{y^2} dy = -\int y^{-2} dy = \frac{1}{y} + C$ で

ある。

例 5

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = \log|x|$$

これは、微分を積分と間違えている。正しく

$$\text{は、} \left(\frac{1}{x} \right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{である。}$$

例 6

$$(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x})' = 2x C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x^2 e^{2x}$$

ここでは、 $(e^{2x})' = 2x e^{2x}$ と間違えている。そのため、指数関数の微分ができていない。指数

関数の微分は、正しくは、 $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ で、

$$(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x})' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x}$$

である。

例 7

$$(C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x})' = 2C_1 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x}$$

左辺第 2 項の $x e^{2x}$ を、 x と e^{2x} との積と理解できていない。そのため、積の微分ができていない。第 2 項の微分は、正しくは、

$$(x \cdot e^{2x})' = e^{2x} + 2x e^{2x} \quad \text{である。}$$

例 8

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^2 + u} du &= \int \frac{1}{x} dx \\ \log|u^2 + u| &= \log|x| + C \end{aligned}$$

左辺の被積分関数を $\frac{1}{u^2 + u} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$ と部

分分数分解して、積分を実行する必要がある。

また、例 (1) と同様に、間違っ

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C \quad \text{としている。正しく}$$

は、左辺は

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^2 + u} du &= \int \frac{1}{u(u+1)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+1} du = \log|u| - \log|u+1| + C \end{aligned}$$

である。

(3) 暗算ミス (例 9~14)

例 9

$$\begin{aligned} y + (1-D)(3-D)y &= 0 \\ y + (1-4D+D^2)y &= 0 \end{aligned}$$

式変形の途中でカッコ内の定数項が 3 でなく 1 になっている。演算子部分のカッコ内は、正しくは、 $(1-D)(3-D) = 3 - 4D + D^2$ である。

例 10

$$\begin{aligned} h^2 - 4h + 4 &= 0 \\ h &= -2 \end{aligned}$$

解の符号が間違っている。正しくは、

$$h^2 - 4h + 4 = 0$$

$$(h-2)^2 = 0$$

$$h = 2$$

である。

例 11

$$\left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \right) x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} x^2 + C\sqrt{x}$$

第 2 項は $C\sqrt{x}$ ではなく、正しくは、

$$Cx^{-\frac{1}{2}} = \frac{C}{\sqrt{x}} \quad \text{である。}$$

例 12

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 7}}{2 \times 1} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} i$$

平方根の内の計算は $9-28=-19$ であるが、
-17 になっている。正しくは、

$$\begin{aligned} h &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 7}}{2 \times 1} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{9-28}}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-19}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i \end{aligned}$$

である。

例 13

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 7}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{19} i$$

虚数項の分母の 2 がなくなっている。正しくは、

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 7}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

である。

例 14

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}}{2}$$

平方根の内は -19 で、虚数になるが、その虚数単位がなくなっている。正しくは、

$$h = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19} i}{2}$$

である。

(4) 文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、
記述のミス (例 15~25)

例 15

$$\int \frac{1}{2x} dy = \int 2x^{-1} dx = 2 \log|x| + C$$

分母の 2 が分子に移動している。正しくは、

$$\int \frac{1}{2x} dy = \int \frac{1}{2} x^{-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

である。

例 16

$$\frac{15\cos x}{3D+6} = \frac{(D-2)\cos 15x}{3(D-2)(D+2)}$$

係数の 15 が \cos の中に移動している。正しく

$$\text{は、} \frac{15\cos x}{3D+6} = \frac{15(D-2)\cos x}{3(D-2)(D+2)}$$

である。

例 17

$$5 \frac{(D-2)\cos x}{(D-2)(D+2)} = 15 \frac{-\sin x - 2\cos x}{D^2 - 4}$$

係数の 5 が 15 に書き換わっている。正しく

$$\text{は、} 5 \frac{(D-2)\cos x}{(D-2)(D+2)} = 5 \frac{-\sin x - 2\cos x}{D^2 - 4}$$

である。

例 18

$$\frac{|x^2 + 1|}{(D+1)^2 + D - 5} = \frac{x+1}{D^2 + 3D - 4}$$

分子の x の 2 乗が 1 乗に書き換わっている。

$$\text{正しくは、} \frac{|x^2 + 1|}{(D+1)^2 + D - 5} = \frac{x^2 + 1}{D^2 + 3D - 4}$$

である。

例 19

$$\frac{x^2 + 1}{(D+1)^2 + (D+1) - 6} = \frac{x^2 + 1}{D^2 + 3D - 5}$$

分母の展開ときに、定数項の一つを書き忘れていたと思われる。正しくは、

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + 1}{(D+1)^2 + (D+1) - 6} \\ &= \frac{x^2 + 1}{D^2 + 2D + 1 + D + 1 - 6} = \frac{x^2 + 1}{D^2 + 3D - 4} \end{aligned}$$

である。

例 20

$$\begin{aligned} & h^2 + 3h + 7 = 0 \\ & h = \frac{-3 \pm \sqrt{4 - 28}}{2} \end{aligned}$$

3 の 2 乗であるはずが、2 の 2 乗と書き間違えている。正しくは、

$$\begin{aligned} & h^2 + 3h + 7 = 0 \\ & h = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 7}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 28}}{2} \end{aligned}$$

である。

例 21

$$e^x \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{21}{32} \right) = -e^x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{21}{32} \right)$$

括弧の外に $-$ の符号を出した時、第 2 項以降の符号が $+$ になるのに、間違っている。正しくは、

$$e^x \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{21}{32} \right) = -e^x \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{21}{32} \right)$$

である。

例 22

$$\begin{aligned} & \text{問題 } y - Dz + z = 0 \\ & \text{解答 } y - (D+1)z = 0 \end{aligned}$$

問題から解答に式を書き写すときに、括弧の中の定数項の 1 の符号は正しくは $-$ であるから、間違っている。正しくは、

$$\begin{aligned} & \text{問題 } y - Dz + z = 0 \\ & \text{解答 } y - (D-1)z = 0 \end{aligned}$$

である。

例 23

$$\begin{aligned} & \text{問題 } y'' + y' - 6y = 0 \\ & \text{解答 } y'' - y' - 6y = 0 \end{aligned}$$

問題から解答に式を写すときに、 y' の符号の転記ミスをしている。

例 24

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$$

積分定数 C を書き忘れている。正しくは、

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \text{ である。}$$

例 25

$$-C_2 2xe^{2x} + 3C_2 xe^{2x}$$

C_2 は定数係数であるので 2 項とも xe^{2x} の同類項としてまとめる必要があるが、別の項として以降の計算をしている。正しくは、

$$\begin{aligned} & -C_2 2xe^{2x} + 3C_2 xe^{2x} \\ &= -2C_2 xe^{2x} + 3C_2 xe^{2x} = (-2+3)C_2 xe^{2x} = 3C_2 xe^{2x} \end{aligned}$$

である。

3. 計算ミスのパターンについての検討

それぞれの計算ミスのパターンについて、以下のように考えられる。

(1) 問題を理解していない・解法の公式の間違い

問題の微分方程式の型式を間違えて判断したと考えられる。

これは、何の問題かを把握していない。もしくは、解法自体を理解していないために解法の公式の選択を間違える、使えない解法を使うなどの間違いである。

しかし、学生は問題を理解していないと考えず、単に計算ミスをしていると考えている場合が多い。

(2) 計算規則の間違い

微分積分の計算間違いが主である。

文字式の割り算、積分の計算の間違いや、微分と積分を間違えるなど、微分積分の計算に習熟していないために起こる間違いである。

また、「積の微分」や「部分分数分解が必要な積分」などの複雑な計算があまりできていない。

(3) 暗算ミス

勘違いの計算ミスが主となっている。公式の記憶違いや勘違いなどが考えられる。途中経過が示されていないため、どのように間違えたのかが不明である。(2) や (4) の計算ミスである可能性もある。

(4) 文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス

不注意が原因と考えられる。

意外に多いのが転記ミスである。後で見て、なぜと思うようなものである。そのため、計算を間違えていることに気がついていないことが多い。この点を学生に指摘すると、なぜそのように書いたのか自身でも不思議に思うようである。

これらの計算ミスのパターンの割合を表 1 に示す。

表 1. 計算ミスのパターンとその割合

計算ミスのパターン	割合
(1) 問題を理解していない・解法の公式の間違い	32.9%
(2) 計算規則の間違い	36.5%
(3) 暗算ミス	11.5%
(4) 文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス	19.1%

「(1) 問題を理解していない・解法の公式の間違い」が 32.9% で全体のほぼ 1/3 を占める。どの形式の微分方程式であるか、どの解法の公式を使えばよいかなどの内容を理解していないものがこれである。

一般に計算ミスとされる「(2) 計算規則の間違い」が全体の 36.5% である。計算に習熟して

いないことが大きな原因と考えられる。

ケアレスミスと考えられる「(3) 暗算ミス」が全体の 11.5%、「(4) 文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス」が全体の 19.1%であり、両方を合わせると全体の 30.6%である。意外に単純ミスが多いと思われる。

特に、「(3) 暗算ミス」は、記憶違いや勘違いが原因であると思われる。途中経過を省略したために間違えたのではないかを思われるものも多い。丁寧に計算することで避けることができる可能性があると考えられる。

「(4) 文字や数字、式の読み間違いや転記ミス、記述のミス」も割合として意外にも多く、注意することで回避できる可能性があると考えられる。また、数字や文字を乱雑に書き、読み間違えているミスもあり、丁寧に書くことで回避できるのではないかとと思われる。

4. まとめと今後の課題

「応用数学」の試験問題の解答から、学生の計算ミスのパターンを分類した。本論文では、大きく 4 つに分類した。

計算ミスというより科目内容の理解が不十分であることに原因があると考えられるもの、計算に習熟していないことに原因があると考えられるもの、記憶違いや勘違いをしていることに原因があると考えられるもの、不注意に原因があると考えられるものがあつた。

これらの計算ミスの原因をさらに詳しく分析するためにより細分化したパターンの分類と共にその内容の分析も必要となると考えられる。

また、このような間違いを回避する方法の検討が今後重要となる。パターンにより回避する方法も異なると考えられる。

教員が学生の計算ミスのパターンにどのようなものがあるかを理解することは講義をするうえで非常に有用であるといえる。

参考文献

- 稲葉宏和・桶 敏. 2015. 数学補習用 eLearning システム構築の試み. 平成 26 年度石川県立大学年報. 46-57.
- 佐藤 誠. 2009. 物理答案に頻出する計算間違いのパターン. 津山高専紀要 第 51 号 59-62.
- 鈴木宏昭・鈴木高士・村山 功・杉本 卓. 1989. 教科理解の認知心理学. 新曜社. 2 章 算数・数学の理解.
- 皆川雅章. 2016. 大学初年次における基礎的計算力育成方法の検討—動画教材と学習用ノート の活用—. 2016PC Conference CIEC 研究大会論文集. 197-198.